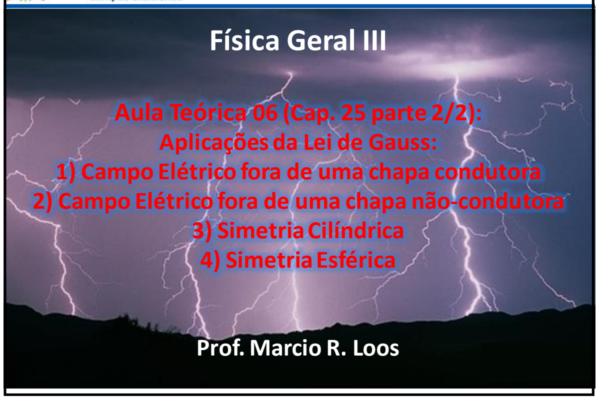
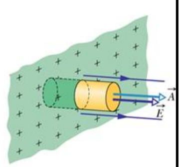
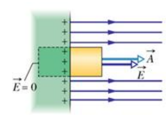
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Campus Blumenau



Campo Elétrico fora de uma Chapa Condutora

- A fig. ao lado mostra uma chapa CONDUTORA com uma carga + em excesso sobre sua superfície.
- Qual o campo E imediatamente fora da superfície?
- Usaremos a Lei de Gauss!
- Use sempre a simetria do problema para determinar a forma da superfície gaussiana.
- Imaginamos uma superfície gaussiana cilíndrica embutida na chapa, perpendicular à chapa.
- Uma base do cilindro está dentro da chapa e a outra está fora.
- O campo E deve ser perpendicular à chapa (se não fosse, as cargas se moveriam até cancelar a componente paralela de E).





Campo Elétrico fora de uma Chapa Condutora

- A sup. gaussiana (área A) encerra uma carga dada por:

$$\sigma = q / A \Rightarrow q = \sigma A$$

- De acordo com a Lei de Gauss, temos:

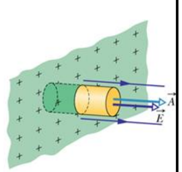
$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc}$$

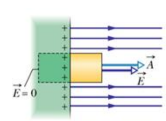
$$\varepsilon_0 E \cos\theta \oint dA = \sigma A$$

$$\varepsilon_0 EA = \sigma A$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Superfície Condutora





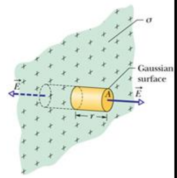
Campo Elétrico fora de uma chapa não-condutora

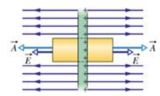
Å Uma chapa não-condutora com densidade superficial uniforme de cargas tem a mesma geometria de uma chapa condutora...

Å ...Usaremos a mesma sup. gaussiana para calcular E fora da chapa

Å A única diferença é que agora um lado do cilindro não envolve um condutor e há fluxo em ambos lados.

Å A simetria do problema sugere que o campo E será a metade do obtido para uma chapa condutora





Campo Elétrico fora de uma chapa não-condutora

Å A sup. gaussiana (área A) encerra uma carga dada por:

$$\sigma = q / A \Rightarrow q = \sigma A$$

Å De acordo com a Lei de Gauss, temos:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc}$$

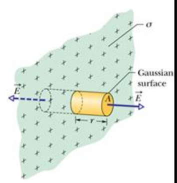
$$\varepsilon_0 \left(E \cos\theta \int dA + E \cos\theta \int dA \right) = \sigma A$$

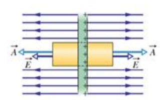
$$\varepsilon_0 (EA + EA) = \sigma A$$

$$\varepsilon_0 2EA = \sigma A$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Superfície não Condutora





Já resolvemos o problema anterior!

Relembrando da Aula 05

Exemplo 1: O Campo Elétrico criado por um disco de carga

Å O disco pode ser dividido em anéis concêntricos.

Å O campo criado em P por todos os anéis é obtido por integração.

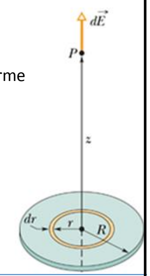
Å Na fig. vemos um dos anéis de raio **r** e largura **dr**.

Å O disco possui uma densidade superficial de carga uniforme dada por

$$\sigma = \frac{q}{A} \Rightarrow q = \sigma A \qquad \frac{dq}{dA} = \sigma$$

Å Mas,

$$A = \pi r^2 \qquad \frac{dA}{dr} = 2\pi r \qquad dA = 2\pi r dr \qquad dq = 2\pi\sigma r dr$$



Exemplo 1: O Campo Elétrico criado por um disco de carga

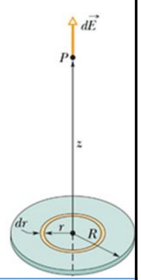
Å Já resolvemos o problema do campo elétrico criado por um anel carregado:

$$E = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 \left(z^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

Å Para calcularmos o campo **dE** criado pelo anel de raio **r** com carga **dq,** devemos considerar na eq. acima:

$$E \Rightarrow dE \qquad q \Rightarrow dq = 2\pi\sigma r dr \qquad R \Rightarrow r$$

$$dE = \frac{z 2\pi\sigma r dr}{4\pi\varepsilon_0 \left(z^2 + r^2\right)^{3/2}} \qquad dE = \frac{\sigma z 2 r dr}{4\varepsilon_0 \left(z^2 + r^2\right)^{3/2}}$$



Exemplo 1: O Campo Elétrico criado por um disco de carga

Å Obtemos E devido a todos os anéis integrando a eq. de r=0 até r=R

$$E = \int dE = \frac{\sigma z}{4\varepsilon_0} \int_{r=0}^{r=R} 2r\left(z^2 + r^2\right)^{-3/2} dr$$

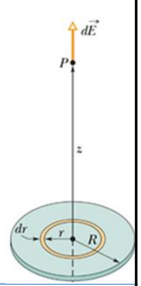
Å Usamos um artifício para resolver a integral acima:

$$\int X^m dx = \frac{X^{m+1}}{m+1}$$

Å Assumimos

$$x = \left(z^2 + r^2\right) \qquad m = -3/2$$

$$\frac{dx}{dr} = 2r \Rightarrow dx = 2r dr$$



Exemplo 1: O Campo Elétrico Criado por um disco de carga

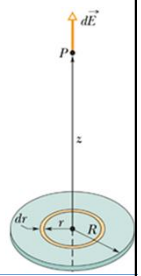
Å Voltando à integral, temos:

$$\int_{r=0}^{r=R}\left(z^2+r^2\right)^{-3/2}2rdr=\left[\frac{\left(z^2+r^2\right)^{-3/2+1}}{-3/2+1}\right]_{r=0}^{r=R}$$

$$=\left[-\frac{\left(z^2+r^2\right)^{-1/2}}{1/2}\right]_{r=0}^{r=R}$$

$$=-\frac{\left(z^2+R^2\right)^{-1/2}}{1/2}+\frac{\left(z^2\right)^{-1/2}}{1/2}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{z^2+R^2}}+\frac{2}{z}$$



Exemplo 1: O Campo Elétrico Criado por um disco de carga

Å Voltando à expressão para E

$$E=\int dE=\frac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\int_{r=0}^{r=R}2r\left(z^2+r^2\right)^{-3/2}dr$$

Å Temos

$$E=\frac{\sigma z}{4\varepsilon_0}\left(\frac{2}{z}-\frac{2}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) \Rightarrow \boxed{E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)}$$

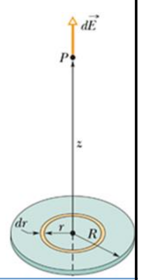
Å **<u>Caso limite:</u>**

R→∞ ou z→0

A equação acima se reduz a

$$\boxed{E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

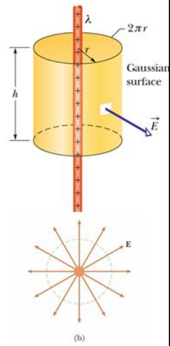
Campo elétrico criado por uma chapa infinita fina não-condutora uniformemente carregada sobre um lado.



Continuando a aula de hoje...

Lei de Gauss
Simetria Cilíndrica

- A fig. mostra uma seção de uma barra fina de plástico, infinitamente longa, carregada uniformemente, com uma densidade linear de carga λ.
- Qual o campo E imediatamente fora da superfície?
- Usaremos a Lei de Gauss!
- Usaremos simetria para escolher uma sup. gaussiana.
- Imaginamos uma superfície gaussiana cilíndrica envolvendo a barra.
- O campo E será perpendicular à sup. lateral do cilindro e se anula na base/topo.



Lei de Gauss
Simetria Cilíndrica

- A sup. Gaussiana (área A) encerra uma carga dada por:

$$\lambda = q/h \Rightarrow q = \lambda h$$

- De acordo com a Lei de Gauss, temos:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc}$$

$$\varepsilon_0 E \cos\theta \int dA = \lambda h$$

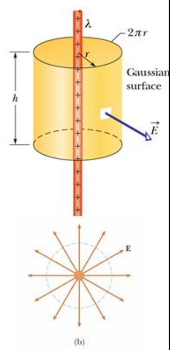
$$\varepsilon_0 E A = \lambda h$$

- A área da sup. gaussiana vale A=2πrh, logo:

$$\varepsilon_0 E 2\pi r h = \lambda h$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

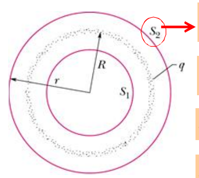
Linha de Carga



Lei de Gauss: Simetria Esférica
Casca esférica

Uma casca esférica uniformemente carregada atrai ou repele uma partícula carregada externa à casca como se toda sua carga estivesse concentrada no seu centro.

Uma casca esférica uniformemente carregada não exerce força eletrostática sobre uma partícula carregada que se localize no interior da casca.



$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc}$$

$$\varepsilon_0 E \cos\theta \oint dA = q_{enc}$$

$$\varepsilon_0 E A = q_{enc}$$

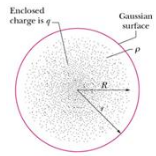
$$\varepsilon_0 E 4\pi r^2 = q_{enc}$$

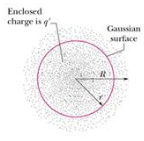
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \quad (r \geq R)$$

$$E = 0 \quad (r < R)$$

Lei de Gauss: Simetria Esférica
Esfera

- Uma esfera pode ser vista como uma justaposição de cascas esféricas concêntricas.
- Na fig., os pontos representam uma distribuição de carga esfericamente simétrica, de raio R.
- A densidade volumétrica de carga **ρ** é uma função de **r** (mas **ρ** deve ser cte para cada uma das cascas esféricas, ≠ r's -> ≠ q's).
- **Qual o campo E para a uma distância r>R?**
- Desenhamos uma superfície gaussiana de raio r>R.
- De acordo com a Lei de Gauss:





$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc} \qquad \varepsilon_0 E \cos\theta \oint dA = q$$

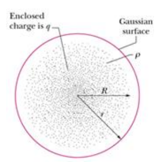
$$\varepsilon_0 E A = q \qquad \varepsilon_0 E 4\pi r^2 = q \qquad \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}}$$

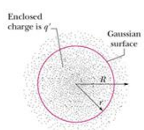
Lei de Gauss: Simetria Esférica
Esfera

- **Qual o campo E para a uma distância r<R?**
- Desenhamos uma superfície gaussiana de raio r<R.
- A sup. gaussiana (área A) encerra uma carga dada por:

$$\rho = \frac{q'}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow q' = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

- De acordo com a Lei de Gauss, temos:





$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc} \qquad \varepsilon_0 E \cos\theta \oint dA = q'$$

$$\varepsilon_0 E A = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \varepsilon_0 E 4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \quad \text{mas} \quad \rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \qquad \boxed{E = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right) r}$$

Lei de Gauss
Duas placas CONDUTORAS paralelas

Å A Fig a) mostra duas placas positivamente e negativamente carregadas com o mesmo módulo de cargas.

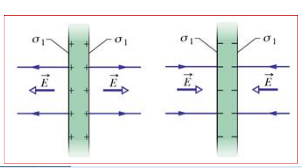
Å Ambas placas estão isoladas e possuem mesma densidade superficial de carga σ_1.

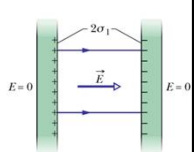
Å Ao **aproximarmos as placas**, as cargas dos lados externos se movem para os lados internos.

Å Agora a densidade superficial de carga é $2\sigma_1$.

Å O módulo do campo elétrico em qualquer ponto entre as placas é: $E = \frac{2\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Å Fora das placas E = 0.

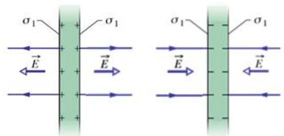




Lei de Gauss
Duas placas NÃO-CONDUTORAS paralelas

- Teremos uma situação diferente se aproximarmos duas placas não-condutoras carregadas.
- As cargas não podem se mover.
- Podemos usar o princípio da superposição.
- No **lado esquerdo** o campo elétrico devido a chapa com carga **+** é cancelado pelo campo devido à placa com carga **-**.
- De forma similar, no lado direito da placa com carga **-** o campo devido às duas placas é cancelado.
- O campo elétrico no centro das chapas se soma e será a metade do obtido no slide anterior:

$$E = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



Aplicamos aqui o princípio da superposição porque as cargas estão fixas. Não o fizemos no slide anterior porque as cargas se moviam.

Exercício

23P. A Fig. 25-30 mostra uma seção através de um tubo longo metálico, cujas paredes são finas. O tubo tem um raio R e uma carga por unidade de comprimento λ sobre a sua superfície. Obtenha expressões para E em função da distância r ao eixo do tubo, considerando: (a) $r > R$ e (b) $r < R$. Faça um gráfico de seus resultados na faixa de $r = 0$ até $r = 5{,}0$ cm, supondo que $\lambda = 2{,}0 \times 10^{-8}$ C/m e $R = 3{,}0$ cm. (*Sugestão*: Use superfícies gaussianas cilíndricas, coaxiais com o tubo metálico.)

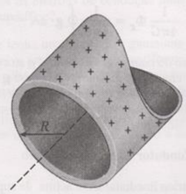


Fig. 25-30 Problema 23.

Resposta:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Você já pode resolver os seguintes exercícios:

Capítulo 23: 5, 6, 7, 10, 13, 15, 17, 18, 19 e 21.
Capítulo 24: 1, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 22, 25
Capítulo 24: 29, 32, 33, 34, 35
Capítulo 24: 36, 47, 51, 52 e 56
Capítulo 25: 2, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13
Capítulo 25: 23, 24, 27, 30, 33, 44, 48, 52 e 53

Livro texto: Halliday, vol. 3, 4ª edição.
Mais informações (cronogramas, lista de exercícios):
web: *loos.prof.ufsc.br* e-mail: *marcio.loos@ufsc.br*