UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA
Campus Blumenau

Física Geral III

Aula Teórica 22 (Cap. 35):
1) Oscilações Eletromagnéticas
2) Relembrando o pêndulo
3) Circuito LC
4) Oscilações amortecidas num circuito RLC
5) Oscilações forçadas e ressonância num circuito RLC

Prof. Marcio R. Loos

Oscilações Eletromagnéticas

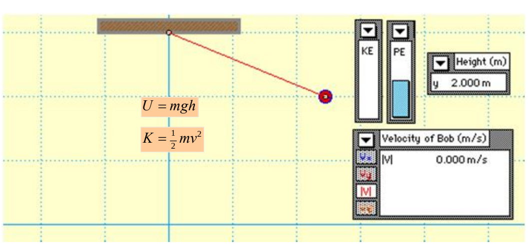
Å Já estudamos os circuitos **RC** e **RL**.

Å Vimos que **carga**, **corrente** e **ddp** crescem e decrescem exponencialmente.

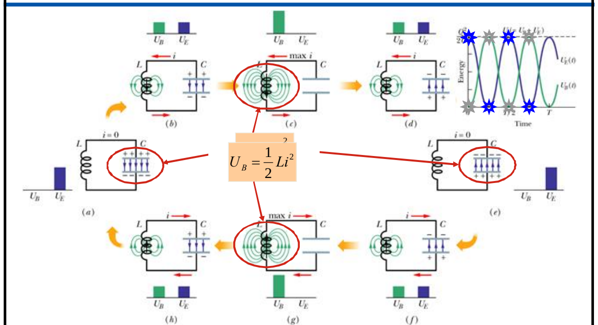
Å O **decaimento**/**crescimento** ocorre de acordo com uma constante **capacitiva**/**indutiva** (τ_c ou τ_L).

Å Ainda não estudamos a combinação **LC** ou **RLC**.

Oscilações: Pêndulo



Oscilações Eletromagnéticas
Circuito LC



c) q=0 no capacitor, mas existe i (devido ao indutor)

O ciclo se repetirá com uma frequência angular ***ω=2πf***

Oscilações Eletromagnéticas

Quantidades oscilando

- Representaremos as ***quantidades que oscilam com letras minúsculas*** e a ***amplitude*** correspondente com ***letras maiúsculas***.

Grandeza oscilando		Amplitude
Tensão	v	V
Corrente	i	I
Carga	q	Q

- Exemplos:

$$q = Q\cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C}\cos^2(\omega t + \phi)$$

$$\frac{dq}{dt} = I\frac{d\cos(\omega t + \phi)}{dt}$$

Exercício 1/2

Um capacitor de *4,7 μ*F é carregado em uma fonte de *12 V*. A fonte é retirada e um indutor de *25 mH* é ligado ao capacitor, de modo que ocorram oscilações *LC*. Qual é a corrente máxima na bobina se não houver resistência no circuito? [***i = 0,16 A***]

Resolução

$U_E = U_B$ Quando U_E=máx, U_B=mín. Mas o valor máximo de ambos é o mesmo

$\frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}LI^2$ $Q = CV$ $LI^2 = CV^2$ $I = \sqrt{\frac{CV^2}{L}}$

Exercício 2/2

Um indutor de um circuito LC com *26 mH* armazena uma energia máxima de *69 mJ*. Calcule a corrente máxima *I*. [***I = 2,3 A***]

Resolução

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2$$

Quando U_B=máx

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2$$

$$I = \sqrt{\frac{2U_B}{L}}$$

Oscilações Eletromagnéticas: Derivação da frequência de oscilação

- Vimos qualitativamente que um circuito ***LC*** atua como um **oscilador**.
- Podemos obter a ***frequência de oscilação*** analisando as equações que governam a energia total:

$$U = U_E + U_B = \frac{q^2}{2C} + \frac{1}{2}Li^2$$

- Como a ***energia é cte***, a derivada em relação a ***t*** deve ser zero:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + Li\frac{di}{dt} = 0$$

- Mas $i = \frac{dq}{dt}$ e $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$, logo: $L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$
- Esta é uma equação diferencial homogênea de segunda ordem, cuja solução é:

$$q = Q\cos(\omega t + \phi)$$

Carga

ϕ= cte de fase/ângulo de fase depende das condições iniciais do circuito

Oscilações Eletromagnéticas: Derivação da frequência de oscilação

$$q = Q\cos(\omega t + \phi)$$

- A eq. mostra que a carga varia de acordo com uma função cosseno com **amplitude *Q*** e **frequência ω**.
- Podemos testar a eq. acima, q(t), através da derivada primeira e segunda:

$$\frac{dq}{dt} = -Q\omega sen(\omega t + \phi) \qquad \frac{d^2q}{dt^2} = -Q\omega^2\cos(\omega t + \phi)$$

- Voltando à eq. original:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = -LQ\omega^2\cos(\omega t + \phi) + \frac{Q}{C}\cos(\omega t + \phi) = 0 \qquad -L\omega^2 + \frac{1}{C} = 0$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Frequência angular natural Circuito LC

Oscilações Eletromagnéticas:
Carga, corrente e energia

Â A solução da equação $L\dfrac{d^2q}{dt^2}+\dfrac{q}{C}=0$ é $q = Q\cos(\omega t+\phi)$, a qual fornece a oscilação da carga.

Â A partir desta eq. podemos determinar a correspondente ***oscilação da corrente***:

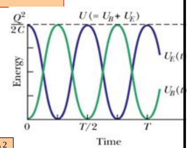
$$i=\frac{dq}{dt}=-Q\omega sen(\omega t+\phi)$$

Â e ***energia***:

$$U_E=\frac{q^2}{2C}=\frac{Q^2}{2C}\cos^2(\omega t+\phi) \qquad U_B=\frac{1}{2}Li^2=\frac{1}{2}LQ^2\omega^2 sen^2(\omega t+\phi)$$

Â Lembre que: $\omega=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ logo, $U_B=\dfrac{Q^2}{2C}sen^2(\omega t+\phi)$

Â É por isso que o gráfico para a oscilação da energia tem a mesma amplitude para ambos U_E e U_B.



Â Note que $U_E+U_B=\dfrac{Q^2}{2C}[\cos^2(\omega t+\phi)+sen^2(\omega t+\phi)]=\dfrac{Q^2}{2C}$ Constante

Exercício

(a) Num circuito *LC* (*L= 26 mH* e *C = 4,7* μF), qual será o valor da carga, expressa em termos da carga máxima *Q*, que estará presente no capacitor quando a energia estiver igualmente repartida entre o campo elétrico e o campo magnético? [$q=\sqrt{2}Q/2$]

(b) Calcule o tempo necessário para que esta condição seja atingida, supondo que o capacitor, no instante inicial, estava carregado. [***t = 2,7 x 10⁻⁴ s***]

Resolução

(a)

$$U_T=\frac{U_{B,máx}}{2}+\frac{U_{E,máx}}{2}$$

$$U_E=\frac{U_{E,máx}}{2}$$

$$\frac{q^2}{2C}=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{2C}$$

$$q=\frac{\sqrt{2}Q}{2}$$

(b)

$$q=Q\cos(\omega t+\phi)$$

$$\frac{\sqrt{2}Q}{2}=Q\cos(\omega t+\phi)$$

$$t=0\,;q=Q$$
$$\cos(\omega t+\phi)=1$$
$$\phi=0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos(\omega t)$$

$$\omega t=\pi/4\ rad$$

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

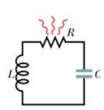
$$t=\frac{\pi}{4}\sqrt{LC}$$

Oscilações Eletromagnéticas:
Oscilações amortecidas num circuito RLC

Â Todos circuitos tem um pouco de resistência.

Â No circuito RLC, as oscilações ficam menores com tempo.

Â Estamos tratando então de ***oscilações amortecidas***.

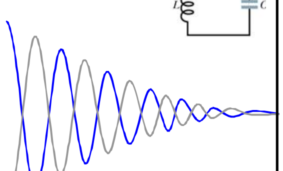


Â A energia total do sistema vale:

$$U=U_E+U_B=\frac{q^2}{2C}+\frac{1}{2}Li^2$$

Â **U não será mais cte.** Parte da energia se transforma em energia térmica:

$$\frac{dU}{dt}=-Ri^2$$



Oscilações amortecidas

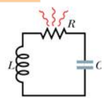
Â O sinal "-"indica que *U* diminui com o tempo.

Oscilações Eletromagnéticas:
Oscilações amortecidas num circuito RLC

- Derivando a 1ª eq. e combinando com a 2ª, temos: $U = U_E + U_B = \dfrac{q^2}{2C} + \dfrac{1}{2}Li^2$ $\quad \dfrac{dU}{dt} = -Ri^2$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + Li\frac{di}{dt} = -i^2R$$

Perda de energia devido à dissipação térmica



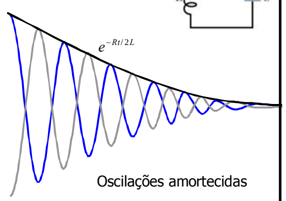
- Substituindo $i = \dfrac{dq}{dt}$ e $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{d^2q}{dt^2}$
- Obtemos uma eq. diferencial para *q*:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

- Solução:

$$q = Qe^{-Rt/2L}\cos(\omega' t + \phi)$$

Função cossenoidal com amplitude exponencialmente decrescente



Oscilações amortecidas

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2}$$

Oscilações Eletromagnéticas:
Oscilações forçadas e ressonância num circuito RLC

Alguns tipos de oscilações:

Oscilações livres: Circuito LC
Oscilações amortecidas: Circuito RLC
Oscilações forçadas: Circuito RLC (sob a ação de uma fem externa)

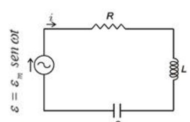
- Mudaremos a notação de **ω** (que é uma cte) para **ω_0**.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ Frequência angular natural

- Consideraremos que o circuito RLC seja submetido a uma **ε(ω , t)**:

$\varepsilon = \varepsilon_m \, sen\, \omega t$ O circuito é conduzido a uma oscilação forçada

- **ε_m** é a amplitude da fem
- **ω** é a ***frequência angular propulsora***.
- Independente da frequência natural **ω_0**, as oscilações do circuito ocorrem com uma frequência angular propulsora **ω**.
- A corrente será $i = I\, sen\,(\omega t - \phi)$
- Condição de ressonância: **$\omega = \omega_0$** .
- I será máximo na ressonância!



Você já pode resolver os seguintes exercícios:

Capítulo 33: 1, 5, 6, 8, 9, 13, 18, 19, 22, 29, 30, 33, 35, 37, 38 e 42.
Capítulo 35: 1,4, 5, 6 9, 11, 14, 18, 21, 24, 27, 28, 33 e 37.

Capítulo 36: 13,14, 15, 19, 20, 24, 25, 30, 44, 45, 47.
Capítulo 37: 1, 6, 10, 12 e 16.

Livro texto: Halliday, vol. 3, 4ª edição.
Mais informações (cronogramas, lista de exercícios):
web: *loos.prof.ufsc.br* e-mail: *marcio.loos@ufsc.br*