

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
Campus Blumenau

## Física Geral III

**Aula Teórica 05 (Cap. 25 parte 1/2) :  
A Lei de Gauss**

**Prof. Marcio R. Loos**




---

---

---

---

---

---

---

---

### Johann Carl Friedrich Gauss

- 1777 - 1855.
- Seu pai era jardineiro e pedreiro.
- Sua mãe era analfabeta.
- Aos sete anos entrou para a escola.
- Na escola, seu diretor pediu que os alunos somassem os números inteiros de 1 a 100...
- ...o diretor mal havia enunciado o problema e Gauss já havia obtido o resultado 5050...
- Por ter acabado tão rápido Gauss foi colocado de castigo!
- Gauss estava usando o raciocínio que demonstra a fórmula da soma de uma **progressão aritmética**.



$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 2

---

---

---

---

---

---

---

---

### O que é a Lei de Gauss?

- Apesar de muito útil, a Lei de Coulomb é expressa em uma forma que não permite simplificações em situações de simetria.

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

- A Lei de Gauss não nos diz nada de novo!
- Ela não é uma nova lei da Física!
- É outra forma de expressar a Lei de Coulomb.
- A Lei de Gauss é muitas vezes mais fácil de ser usada do que a Lei de Coulomb (simetria).
- A escolha de qual Lei usar dependerá do problema!

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 3

---

---

---

---

---

---

---

---

### Lei de Gauss

- Como determinar a carga  $q$  dentro da caixa?

(a) (b)

Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

Podemos usar uma carga teste  $q_0$  para medir  $E$  fora da caixa!

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 4

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Lei de Gauss

- A Lei de Gauss é aplicada usando-se uma **superfície gaussiana**.
- A superfície gaussiana é uma superfície **fechada hipotética** que envolve toda a distribuição de carga.
- A lei de Gauss **relaciona** as **linhas de campo elétrico** que passam através da superfície fechada e a **carga líquida envolvida** pela superfície.
- Na fig. ao lado, a superfície gaussiana é uma esfera.
- Constatamos um campo em cada ponto da esfera.
- O campo tem mesmo módulo em cada ponto e aponta radialmente para fora!
- Isto sugere que uma carga **positiva** está dentro da esfera.
- **Sem medir a carga dentro da esfera ou saber sua distribuição, podemos usar a Lei de Gauss para calcular a carga líquida dentro da superfície!**

Spherical Gaussian surface

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 5

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Fluxo de Volume

(a)

(b)

**(a)** A taxa de **fluxo de fluido** através do retângulo de área  $A$  é  $vA$  quando a área do retângulo está perpendicular ao vetor velocidade.

**(b)** Quando o retângulo forma um ângulo  $\phi$  com a vertical, a taxa de fluxo é  $vA \cos \phi$ .

Podemos substituir o *vetor velocidade* do fluido pelo *campo elétrico*  $E$  para obter o conceito de **fluxo do campo elétrico**  $\Phi$ .

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 6

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Fluxo do campo elétrico

(a)

(b)

(a) O fluxo elétrico através da superfície vale  $\Phi = EA$ .

(b) Quando o vetor área forma um **ângulo  $\phi$**  com o vetor  $E$ , a área projetada num plano perpendicular ao fluxo é:

$A_{\text{perp.}} = A \cos \phi$

Logo:

$\Phi = EA \cos \phi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$

O fluxo é zero quando  $\phi = 90^\circ$ , o retângulo estará em um plano paralelo ao fluxo e nenhuma linha de campo passa pelo retângulo.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 7

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Lei de Gauss - Fluxo do campo elétrico

- Vimos que podemos imaginar linhas de campo fluindo através de uma superfície.
- Considere uma **superfície Gaussiana assimétrica** imersa em um campo não-uniforme.
- Dividimos a superfície em pequenos quadrados  $\Delta A$ .
- Cada  $\Delta A$  é representado por um **vetor área  $\Delta \mathbf{A}$** .
- $\Delta \mathbf{A}$  é **perpendicular** a superfície e aponta para fora.
- Como  $\Delta \mathbf{A}$  é pequeno,  $\mathbf{E}$  é constante.
- $\Delta \mathbf{A}$  e  $\mathbf{E}$  formam um ângulo  $\theta$  entre si (fig.).

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 8

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Lei de Gauss - Fluxo do campo elétrico

- Representamos o fluxo de linhas de campo como  $\Phi$ .
- O fluxo de campo elétrico através de um elemento de área  $\Delta A$  é:

$$\Delta \Phi = \vec{E} \cdot \Delta \vec{A} = E \Delta A \cos \theta$$

- $\theta > 90^\circ$ : O fluxo é **negativo** ( $\mathbf{E}$  aponta para dentro da superfície)
- $\theta < 90^\circ$ : O fluxo é **positivo** ( $\mathbf{E}$  aponta para fora da superfície)
- $\theta = 90^\circ$ : O fluxo é **nulo** ( $\mathbf{E}$  é perpendicular à superfície)
- A unidade de fluxo elétrico é:  $[\Phi] = [\text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}]$ .

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 9

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Lei de Gauss - Fluxo do campo elétrico

- Quando temos uma superfície complexa, podemos dividi-la em minúsculos elementos infinitesimais de área:

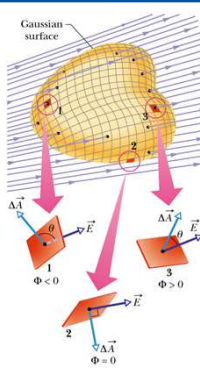
$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA \cos \theta$$

- Estaremos interessados em **superfícies fechadas** (aí a direção “para fora” é evidente).
- Qual é o fluxo elétrico fora de tal superfície fechada?**
- Devemos integrar sobre toda a superfície (fechada).

$$\Phi = \oint d\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Fluxo positivo => fora  
 Fluxo negativo => dentro

- O símbolo  $\oint$  indica a integral sobre uma superfície fechada.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 10

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

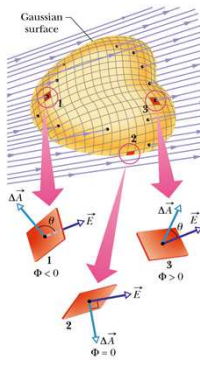
### Lei de Gauss - Fluxo do campo elétrico

- A superfície fechada é chamada de **Superfície Gaussiana**

...uma vez que esta superfície é usada pela Lei de Gauss

Lei de Gauss

O fluxo de campo elétrico através de uma superfície fechada é proporcional a carga encerrada pela superfície.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 11

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Lei de Gauss: forma matemática

- A constante de proporcionalidade na Lei de Gauss é  $\epsilon_0$ :

$$\epsilon_0 \Phi = q_{enc}$$

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc}$$

$q_{enc}$  (ou  $q$ ) é a soma algébrica de todas as cargas encerradas pela superfície.

Use o sinal na soma!

$q > 0$  fluxo p/ fora.

$q < 0$  fluxo p/ dentro.

- Cargas fora da superfície não são incluídas no cálculo!
- A distribuição das cargas no interior da superfície não importa.
- O vetor resultante  $E$  na Lei de Gauss é o campo elétrico resultante de todas as cargas internas ou externas à superfície gaussiana!
- As linhas de campo devido a cargas externas entram e saem da superfície em igual quantidade.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 12

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Pense um pouco...**

Qual das figuras a seguir corretamente mostra um fluxo elétrico para fora do elemento de área?

A. I.  
B. II.  
C. III.  
D. IV.  
E. I and III.

Resposta: Lembre-se  $\theta < 90^\circ$ : O fluxo é positivo

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA | Prof. Loos | Física Geral III | loos.prof.ufsc.br | 13

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Lei de Gauss – Superfície gaussiana encerrando cargas positiva e negativa**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA | Prof. Loos | Física Geral III | loos.prof.ufsc.br | 14

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Lei de Gauss: forma matemática**

- Você lembra?
- Ao aprendermos sobre a Lei de Coulomb, escrevemos a constante k como
 
$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$
- Podemos ver agora o motivo ao integrarmos o fluxo elétrico de uma carga puntiforme sobre uma superfície gaussiana esférica:
 
$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc}$$

$$\epsilon_0 E \cos\theta \oint dA = q_{enc}$$

$$\epsilon_0 EA = q_{enc}$$

$$\epsilon_0 E 4\pi r^2 = q_{enc}$$
- Resolvendo a Eq. para E temos:
 
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{enc}}{r^2}$$

Lei de Coulomb

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA | Prof. Loos | Física Geral III | loos.prof.ufsc.br | 15

---

---

---

---

---

---

---

---

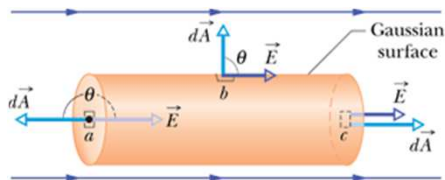
---

---

### Lei de Gauss - Exemplo

- A Figura mostra uma superfície gaussiana na forma de um cilindro de raio R imerso num campo elétrico uniforme  $\vec{E}$ , com o eixo do cilindro paralelo ao campo. Qual é o fluxo  $\Phi$  do campo elétrico através dessa superfície fechada?

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad \epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc}$$




---

---

---

---

---

---

---

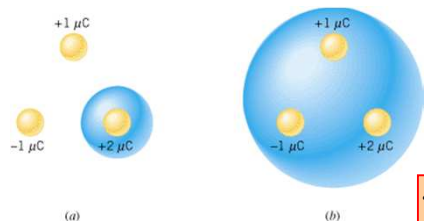
---

---

---

### Lei de Gauss - Exemplo

- A figura mostra um arranjo de 3 cargas. Diferentes superfícies gaussianas são mostradas em (a) e (b). Através de qual superfície, se qualquer, passa o maior fluxo elétrico?



$$\epsilon_0 \Phi = q_{enc} \quad \epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc}$$

---

---

---

---

---

---

---

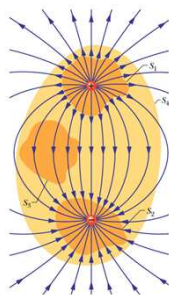
---

---

---

### Lei de Gauss - Aplicação

- Considere um dipolo com cargas positiva e negativa de igual módulo.
- Imagine quatro superfícies  $S_1, S_2, S_3, S_4$ , como mostrado na fig.
- $S_1$  encerra uma carga positiva. Note que o campo aponta para fora de  $S_1$ , sendo o fluxo de  $\vec{E}$  **positivo**.
- $S_2$  encerra uma carga negativa. Note que  $\vec{E}$  aponta para dentro em todos pontos da superfície. Assim, o fluxo de  $\vec{E}$  através de  $S_2$  é **negativo**.
- $S_3$  não encerra carga. O fluxo de  $\vec{E}$  é positivo na parte superior e negativo na parte inferior. Os fluxos se anulam e **não há fluxo líquido** através de  $S_3$ .
- $S_4$  encerra ambas cargas. De novo, não há carga líquida encerrada: o fluxo entrando e saindo é igual. **Não há fluxo líquido** através de  $S_4$ .




---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Lei de Gauss - Exemplo

- A figura mostra três pedaços de plástico carregados e uma moeda eletricamente neutra. As seções transversais de duas superfícies gaussianas estão indicadas. Qual é o fluxo do campo elétrico através de cada uma dessas superfícies? Suponha  $q_1=+3.1 \text{ nC}$ ,  $q_2=-5.9 \text{ nC}$  e  $q_3=-3.1 \text{ nC}$ .

$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$      $\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc}$

Resposta:

$\Phi_2 = +350 \text{ Nm}^2/\text{C} = +3,5 \times 10^2 \text{ Nm}^2/\text{C}$

$\Phi_1 = -670 \text{ Nm}^2/\text{C} = -6,7 \times 10^2 \text{ Nm}^2/\text{C}$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA    Prof. Loos    Física Geral III    loos.prof.ufsc.br    19

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Campo na superfície de um condutor

- Imagine um **campo elétrico** em **algum ângulo** arbitrário na superfície do condutor.
- Há uma **componente perpendicular à superfície**, e cargas se moverão nesta direção até alcançar a superfície. Como não podem deixar a superfície, as **cargas param**.
- Há também uma **componente paralela à superfície**. As cargas também sofrerão uma força nesta direção.
- Uma vez que as cargas estão **livres** para se mover (condutor e não isolante) elas irão anular qualquer componente paralela de E.
- Em um tempo muito curto, apenas as componentes perpendiculares existirão.**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA    Prof. Loos    Física Geral III    loos.prof.ufsc.br    20

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

### Campo na superfície de um condutor carregado

- Podemos usar a Lei de Gauss para mostrar que **o interior de um condutor deve ter uma carga líquida nula**.
- A fig. mostra um condutor de forma arbitrária **CARREGADO**.
- Desenhamos uma **superfície gaussiana** dentro do condutor imediatamente junto à superfície.
- Fisicamente, esperamos que **não haja campo elétrico dentro do condutor**. Se houvesse, os elétrons (livres) de condução se moveriam (correntes internas).
- Como  $E=0$  no interior, E deve ser zero na superfície gaussiana! Portanto, o fluxo de campo através da superfície é zero e a carga encerrada é nula.**
- Se as cargas não estão dentro da sup. gaussiana, só podem estar na superfície.
- Imagine que façamos um buraco no condutor e desenhamos uma sup. gaussiana ao redor.
- Pelo mesmo argumento anterior, não há campo elétrico através da nova sup., e não há carga líquida no buraco.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA    Prof. Loos    Física Geral III    loos.prof.ufsc.br    21

---

---

---

---

---

---

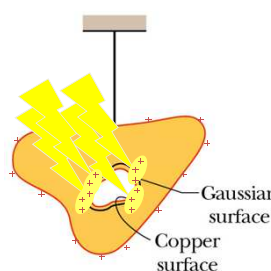
---

---

---

---

### Campo na superfície de um condutor



- É notável que se tentarmos depositar cargas no interior do condutor...
- ...todas as cargas se movem para o exterior e se distribuem de modo que o campo elétrico em todos os pontos é normal à superfície.
- Este fato não é óbvio! Mas a Lei de Gauss nos permitiu mostrar isso.

Lembre-se:

- O campo elétrico é nulo dentro de condutores!
- A partir da Lei de Gauss, buracos/cavidades em condutores tem  $E = 0$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 22

---

---

---

---

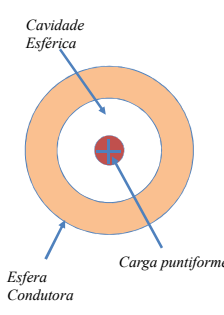
---

---

---

---

### Uma carga dentro de um condutor



- A fig. mostra uma seção transversal de uma casca esférica **metálica** de raio R.
- Uma carga puntiforme +q está localizada no centro da casca.
- A casca está eletricamente neutra.
- Quais são as cargas induzidas nas superfícies interna e externa da casca?
- Estas cargas estão uniformemente distribuídas?
- Qual é a configuração do campo E dentro e fora da casca?

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 23

---

---

---

---

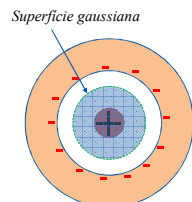
---

---

---

---

### Uma carga dentro de um condutor



**Será o campo nulo ( $E=0$ ) dentro da cavidade?**  
**Não**, pois há uma carga encerrada pela cavidade (Lei de Gauss)

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc}$$

**Será o campo nulo ( $E=0$ ) no condutor?**  
**Sim**, pois como vimos, se houvesse um campo E no condutor os elétrons (livres) de condução iriam se mover.

**Se alargarmos a superfície gaussiana de modo que ela esteja ainda dentro do condutor, haverá alguma carga líquida encerrada pelo condutor?**  
 Parece que sim, mas **não** pode haver. De acordo com a Lei de Gauss, se  $E=0$  e  $q_{enc}=0$ !

**Como explicar isso?**  
 Deve haver uma carga igual e oposta induzida na superfície interior.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 24

---

---

---

---

---

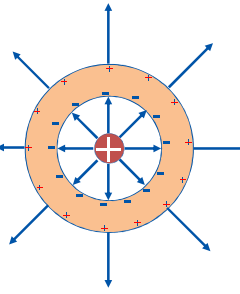
---

---

---



**Uma carga dentro de um condutor**



A carga negativa interage com a carga puntiforme de modo que o campo seja radial dentro da cavidade.

A carga negativa não pode surgir do nada.  
**De onde ela vem?**  
Ela vem da superfície externa: elétrons são atraídos pela carga puntiforme no centro. Assim os elétrons deixaram uma carga positiva para trás.

A carga líquida positiva que surge na sup. externa do condutor é exatamente a mesma que a carga puntiforme no centro.

**Qual a forma das linhas de campo fora da casca?**  
Pela simetria esférica, a **casca positiva de cargas atua como uma carga puntiforme no centro**. Assim, as linhas de campo são como as da carga puntiforme no centro.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 25

---

---

---

---

---

---

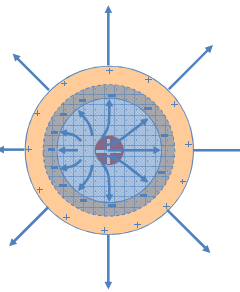
---

---

---

---

**Uma carga dentro de um condutor**



**O que acontece se movermos a carga do centro?**

Ela induzirá uma distribuição de cargas não uniforme na parede interna.

Note que as linhas de campo são distorcidas de modo que permanecem perpendiculares à parede interna.

**O que acontece com a distribuição de carga positiva externa?**  
Desenhe uma superfície gaussiana dentro do condutor para descobrir!  
A carga líquida encerrada pela superfície é zero, então  $E=0$ , o que já sabemos, pois a superfície está dentro do condutor.

**A carga puntiforme interna é blindada pela distribuição de carga induzida**, assim as cargas externas estarão uniformemente distribuídas.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 26

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Você já pode resolver os seguintes exercícios:**

**Capítulo 23:** 5, 6, 7, 10, 13, 15, 17, 18, 19 e 21.  
**Capítulo 24:** 1, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 22, 25  
**Capítulo 24:** 29, 32, 33, 34, 35  
**Capítulo 24:** 36, 47, 51, 52 e 56  
**Capítulo 25:** 2, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13

Livro texto: Halliday, vol. 3, 4ª edição.  
 Mais informações (cronogramas, lista de exercícios):  
 web: [loos.prof.ufsc.br](http://loos.prof.ufsc.br) e-mail: [marcio.loos@ufsc.br](mailto:marcio.loos@ufsc.br)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 27

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---