

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Campus Blumenau

Física Geral III

**Aula Teórica 05 (Cap. 25 parte 1/2) :
A Lei de Gauss**

Prof. Marcio R. Loos



Johann Carl Friedrich Gauss

- 1777 - 1855.
- Seu pai era jardineiro e pedreiro.
- Sua mãe era analfabeta.
- Aos sete anos entrou para a escola.
- Na escola, seu diretor pediu que os alunos somassem os números inteiros de 1 a 100...
- ...o diretor mal havia enunciado o problema e Gauss já havia obtido o resultado 5050...
- Por ter acabado tão rápido Gauss foi colocado de castigo!
- Gauss estava usando o raciocínio que demonstra a fórmula da soma de uma **progressão aritmética**.



$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 2

O que é a Lei de Gauss?

- Apesar de muito útil, a Lei de Coulomb é expressa em uma forma que não permite simplificações em situações de simetria.

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

- A Lei de Gauss não nos diz nada de novo!
- Ela não é uma nova lei da Física!
- É outra forma de expressar a Lei de Coulomb.
- A Lei de Gauss é muitas vezes mais fácil de ser usada do que a Lei de Coulomb (simetria).
- A escolha de qual Lei usar dependerá do problema!

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 3

Lei de Gauss

- Como determinar a carga q dentro da caixa?

(a) (b)

Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

Podemos usar uma carga teste q_0 para medir E fora da caixa!

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 4

Lei de Gauss

- A Lei de Gauss é aplicada usando-se uma **superfície gaussiana**.
- A superfície gaussiana é uma superfície **fechada hipotética** que envolve toda a distribuição de carga.
- A lei de Gauss **relaciona** as **linhas de campo elétrico** que passam através da superfície fechada e a **carga líquida envolvida** pela superfície.
- Na fig. ao lado, a superfície gaussiana é uma esfera.
- Constatamos um campo em cada ponto da esfera.
- O campo tem mesmo módulo em cada ponto e aponta radialmente para fora!
- Isto sugere que uma carga **positiva** está dentro da esfera.
- **Sem medir a carga dentro da esfera ou saber sua distribuição, podemos usar a Lei de Gauss para calcular a carga líquida dentro da superfície!**

Spherical Gaussian surface

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 5

Fluxo de Volume

(a)

(b)

(a) A taxa de **fluxo de fluido** através do retângulo de área A é vA quando a área do retângulo está perpendicular ao vetor velocidade.

(b) Quando o retângulo forma um ângulo ϕ com a vertical, a taxa de fluxo é $vA \cos \phi$.

Podemos substituir o *vetor velocidade* do fluido pelo *campo elétrico* E para obter o conceito de **fluxo do campo elétrico** Φ .

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 6

Fluxo do campo elétrico

(a)

(b)

(a) O fluxo elétrico através da superfície vale $\Phi = EA$.

(b) Quando o vetor área forma um **ângulo ϕ** com o vetor E , a área projetada num plano perpendicular ao fluxo é:

$A_{\text{perp.}} = A \cos \phi$

Logo:

$\Phi = EA \cos \phi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$

O fluxo é zero quando $\phi = 90^\circ$, o retângulo estará em um plano paralelo ao fluxo e nenhuma linha de campo passa pelo retângulo.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Prof. Loos Física Geral III
loos.prof.ufsc.br

Lei de Gauss - Fluxo do campo elétrico

- Vimos que podemos imaginar linhas de campo fluindo através de uma superfície.
- Considere uma **superfície Gaussiana assimétrica** imersa em um campo não-uniforme.
- Dividimos a superfície em pequenos quadrados ΔA .
- Cada ΔA é representado por um **vetor área $\Delta \mathbf{A}$** .
- $\Delta \mathbf{A}$ é **perpendicular** a superfície e aponta para fora.
- Como $\Delta \mathbf{A}$ é pequeno, \mathbf{E} é constante.
- $\Delta \mathbf{A}$ e \mathbf{E} formam um ângulo θ entre si (fig.).

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Prof. Loos Física Geral III
loos.prof.ufsc.br

Lei de Gauss - Fluxo do campo elétrico

- Representamos o fluxo de linhas de campo como Φ .
- O fluxo de campo elétrico através de um elemento de área ΔA é:

$$\Delta \Phi = \vec{E} \cdot \Delta \vec{A} = E \Delta A \cos \theta$$

- $\theta > 90^\circ$: O fluxo é **negativo** (\mathbf{E} aponta para dentro da superfície)
- $\theta < 90^\circ$: O fluxo é **positivo** (\mathbf{E} aponta para fora da superfície)
- $\theta = 90^\circ$: O fluxo é **nulo** (\mathbf{E} é perpendicular à superfície)
- A unidade de fluxo elétrico é: $[\Phi] = [\text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}]$.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Prof. Loos Física Geral III
loos.prof.ufsc.br

Lei de Gauss - Fluxo do campo elétrico

- Quando temos uma superfície complexa, podemos dividi-la em minúsculos elementos infinitesimais de área:

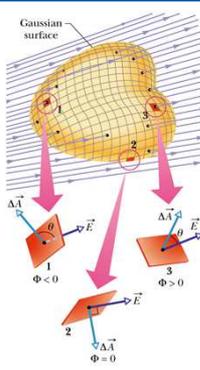
$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA \cos \theta$$

- Estaremos interessados em **superfícies fechadas** (aí a direção “para fora” é evidente).
- Qual é o fluxo elétrico fora de tal superfície fechada?**
- Devemos integrar sobre toda a superfície (fechada).

$$\Phi = \oint d\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Fluxo positivo => fora
 Fluxo negativo => dentro

- O símbolo \oint indica a integral sobre uma superfície fechada.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 10

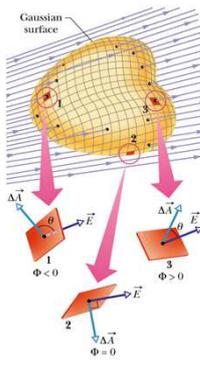
Lei de Gauss - Fluxo do campo elétrico

- A superfície fechada é chamada de **Superfície Gaussiana**

...uma vez que esta superfície é usada pela Lei de Gauss

Lei de Gauss

O fluxo de campo elétrico através de uma superfície fechada é proporcional a carga encerrada pela superfície.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 11

Lei de Gauss: forma matemática

- A constante de proporcionalidade na Lei de Gauss é ϵ_0 :

$$\epsilon_0 \Phi = q_{enc}$$

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc}$$

q_{enc} (ou q) é a soma algébrica de todas as cargas encerradas pela superfície.

Use o sinal na soma!

$q > 0$ fluxo p/ fora.

$q < 0$ fluxo p/ dentro.

- Cargas fora da superfície não são incluídas no cálculo!
- A distribuição das cargas no interior da superfície não importa.
- O vetor resultante \vec{E} na Lei de Gauss é o campo elétrico resultante de todas as cargas internas ou externas à superfície gaussiana!
- As linhas de campo devido a cargas externas entram e saem da superfície em igual quantidade.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 12

Pense um pouco...

Qual das figuras a seguir corretamente mostra um fluxo elétrico para fora do elemento de área?

A. I.
B. II.
C. III.
D. IV.
E. I and III.

Resposta: Lembre-se $\theta < 90^\circ$: O fluxo é positivo

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 13

Lei de Gauss – Superfície gaussiana encerrando cargas positiva e negativa

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 14

Lei de Gauss: forma matemática

- Você lembra?
- Ao aprendermos sobre a Lei de Coulomb, escrevemos a constante k como

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$
- Podemos ver agora o motivo ao integrarmos o fluxo elétrico de uma carga puntiforme sobre uma superfície gaussiana esférica:

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc} \quad \epsilon_0 E \cos\theta \oint dA = q_{enc}$$

$$\epsilon_0 EA = q_{enc} \quad \epsilon_0 E 4\pi r^2 = q_{enc}$$
- Resolvendo a Eq. para E temos:

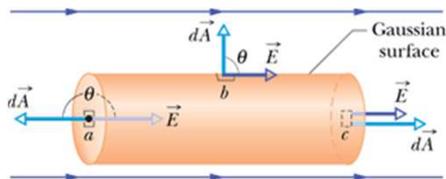
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{enc}}{r^2}$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 15

Lei de Gauss - Exemplo

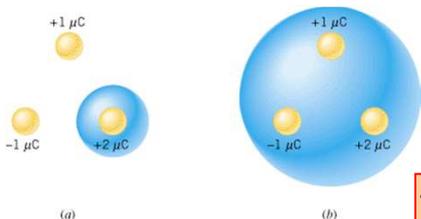
- A Figura mostra uma superfície gaussiana na forma de um cilindro de raio R imerso num campo elétrico uniforme \vec{E} , com o eixo do cilindro paralelo ao campo. Qual é o fluxo Φ do campo elétrico através dessa superfície fechada?

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad \epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc}$$



Lei de Gauss - Exemplo

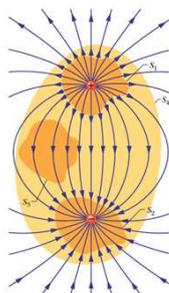
- A figura mostra um arranjo de 3 cargas. Diferentes superfícies gaussianas são mostradas em (a) e (b). Através de qual superfície, se qualquer, passa o maior fluxo elétrico?



$$\epsilon_0 \Phi = q_{enc} \quad \epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc}$$

Lei de Gauss - Aplicação

- Considere um dipolo com cargas positiva e negativa de igual módulo.
- Imagine quatro superfícies S_1, S_2, S_3, S_4 , como mostrado na fig.
- S_1 encerra uma carga positiva. Note que o campo aponta para fora de S_1 , sendo o fluxo de E **positivo**.
- S_2 encerra uma carga negativa. Note que E aponta para dentro em todos pontos da superfície. Assim, o fluxo de E através de S_2 é **negativo**.
- S_3 não encerra carga. O fluxo de E é positivo na parte superior e negativo na parte inferior. Os fluxos se anulam e **não há fluxo líquido** através de S_3 .
- S_4 encerra ambas cargas. De novo, não há carga líquida encerrada: o fluxo entrando e saindo é igual. **Não há fluxo líquido** através de S_4 .



Lei de Gauss - Exemplo

- A figura mostra três pedaços de plástico carregados e uma moeda eletricamente neutra. As seções transversais de duas superfícies gaussianas estão indicadas. Qual é o fluxo do campo elétrico através de cada uma dessas superfícies? Suponha $q_1=+3.1 \text{ nC}$, $q_2=-5.9 \text{ nC}$ e $q_3=-3.1 \text{ nC}$.

$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$ $\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc}$

Resposta:

$\Phi_2 = +350 \text{ Nm}^2/\text{C} = +3,5 \times 10^2 \text{ Nm}^2/\text{C}$

$\Phi_1 = -670 \text{ Nm}^2/\text{C} = -6,7 \times 10^2 \text{ Nm}^2/\text{C}$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 19

Campo na superfície de um condutor

- Imagine um **campo elétrico** em **algum ângulo** arbitrário na superfície do condutor.
- Há uma **componente perpendicular à superfície**, e cargas se moverão nesta direção até alcançar a superfície. Como não podem deixar a superfície, as **cargas param**.
- Há também uma **componente paralela à superfície**. As cargas também sofrerão uma força nesta direção.
- Uma vez que as cargas estão **livres** para se mover (condutor e não isolante) elas irão anular qualquer componente paralela de E.
- Em um tempo muito curto, apenas as componentes perpendiculares existirão.**

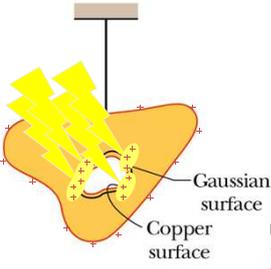
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 20

Campo na superfície de um condutor carregado

- Podemos usar a Lei de Gauss para mostrar que **o interior de um condutor deve ter uma carga líquida nula**.
- A fig. mostra um condutor de forma arbitrária **CARREGADO**.
- Desenhamos uma **superfície gaussiana** dentro do condutor imediatamente junto à superfície.
- Fisicamente, esperamos que **não haja campo elétrico dentro do condutor**. Se houvesse, os elétrons (livres) de condução se moveriam (correntes internas).
- Como $E=0$ no interior, E deve ser zero na superfície gaussiana! Portanto, o fluxo de campo através da superfície é zero e a carga encerrada é nula.**
- Se as cargas não estão dentro da sup. gaussiana, só podem estar na superfície.**
- Imagine que façamos um buraco no condutor e desenhamos uma sup. gaussiana ao redor.
- Pelo mesmo argumento anterior, não há campo elétrico através da nova sup., e não há carga líquida no buraco.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 21

Campo na superfície de um condutor



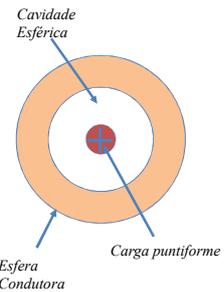
- É notável que se tentarmos depositar cargas no interior do condutor...
- ...todas as cargas se movem para o exterior e se distribuem de modo que o campo elétrico em todos os pontos é normal à superfície.
- Este fato não é óbvio! Mas a Lei de Gauss nos permitiu mostrar isso.

Lembre-se:

- O campo elétrico é nulo dentro de condutores!
- A partir da Lei de Gauss, buracos/cavidades em condutores tem $E = 0$

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 22

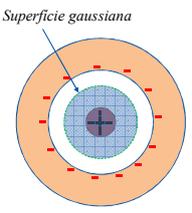
Uma carga dentro de um condutor



- A fig. mostra uma seção transversal de uma casca esférica **metálica** de raio R.
- Uma carga puntiforme +q está localizada no centro da casca.
- A casca está eletricamente neutra.
- Quais são as cargas induzidas nas superfícies interna e externa da casca?
- Estas cargas estão uniformemente distribuídas?
- Qual é a configuração do campo E dentro e fora da casca?

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 23

Uma carga dentro de um condutor



Será o campo nulo ($E=0$) dentro da cavidade?
Não, pois há uma carga encerrada pela cavidade (Lei de Gauss)

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc}$$

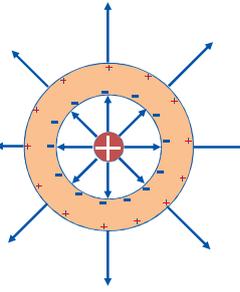
Será o campo nulo ($E=0$) no condutor?
Sim, pois como vimos, se houvesse um campo E no condutor os elétrons (livres) de condução iriam se mover.

Se alargarmos a superfície gaussiana de modo que ela esteja ainda dentro do condutor, haverá alguma carga líquida encerrada pelo condutor?
 Parece que sim, mas **não** pode haver. De acordo com a Lei de Gauss, se $E=0$ e $q_{enc}=0$!

Como explicar isso?
 Deve haver uma carga igual e oposta induzida na superfície interior.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 24

Uma carga dentro de um condutor



A carga negativa interage com a carga puntiforme de modo que o campo seja radial dentro da cavidade.

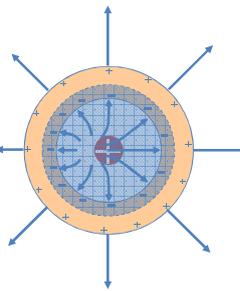
A carga negativa não pode surgir do nada.
De onde ela vem?
Ela vem da superfície externa: elétrons são atraídos pela carga puntiforme no centro. Assim os elétrons deixaram uma carga positiva para trás.

A carga líquida positiva que surge na sup. externa do condutor é exatamente a mesma que a carga puntiforme no centro.

Qual a forma das linhas de campo fora da casca?
Pela simetria esférica, a **casca positiva de cargas atua como uma carga puntiforme no centro**. Assim, as linhas de campo são como as da carga puntiforme no centro.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 25

Uma carga dentro de um condutor



O que acontece se movermos a carga do centro?

Ela induzirá uma distribuição de cargas não uniforme na parede interna.

Note que as linhas de campo são distorcidas de modo que permanecem perpendiculares à parede interna.

O que acontece com a distribuição de carga positiva externa?
Desenhe uma superfície gaussiana dentro do condutor para descobrir!
A carga líquida encerrada pela superfície é zero, então $E=0$, o que já sabemos, pois a superfície está dentro do condutor.

A carga puntiforme interna é blindada pela distribuição de carga induzida, assim as cargas externas estarão uniformemente distribuídas.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 26

Você já pode resolver os seguintes exercícios:

Capítulo 23: 5, 6, 7, 10, 13, 15, 17, 18, 19 e 21.
Capítulo 24: 1, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 22, 25
Capítulo 24: 29, 32, 33, 34, 35
Capítulo 24: 36, 47, 51, 52 e 56
Capítulo 25: 2, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13

Livro texto: Halliday, vol. 3, 4ª edição.
Mais informações (cronogramas, lista de exercícios):
web: loos.prof.ufsc.br e-mail: marcio.loos@ufsc.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA Prof. Loos Física Geral III loos.prof.ufsc.br 27
